

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

Matematică

Test 40

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 2 ore.

SUBIECTUL I - Pe foaia de examen scrieți numai rezultatele.

(30 de puncte)

- 5p 1. Rezultatul calculului $50 - 5 \cdot 9$ este egal cu
- 5p 2. Cinci caiete de același fel costă 20 de lei. Trei astfel de caiete costă ... lei.
- 5p 3. Cel mai mic număr natural de două cifre, divizibil cu 3 este
- 5p 4. Bisectoarea unui unghi drept formează cu una din laturile unghiului un unghi cu măsura de ...°.
- 5p 5. În *Figura 1* este reprezentat un cub $ABCDEFGH$ cu latura de 30 cm. Lungimea segmentului EG este egală cu ... cm.

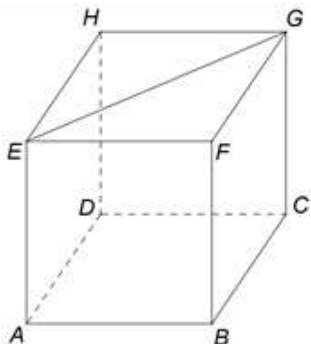
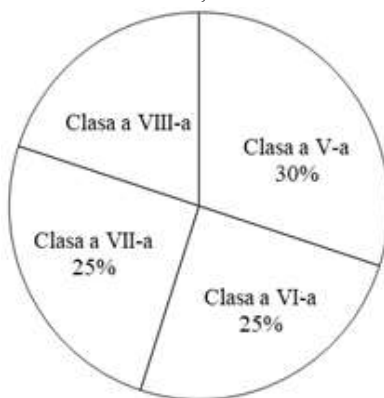


Figura 1

- 5p 6. Într-o școală, în clasele de gimnaziu, învață 600 de elevi. În diagrama de mai jos este prezentată repartiția procentuală, pe clase, a elevilor din acea școală.



Conform informațiilor din diagramă, numărul de elevi din clasa a VIII-a care învață la această școală este egal cu

SUBIECTUL al II-lea - Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

(30 de puncte)

- 5p 1. Desenați, pe foaia de examen, un trapez isoscel $ABCD$ cu $AB \parallel CD$ și $AB > CD$.
- 5p 2. Numerele naturale a și b sunt direct proporționale cu 2 și 6, iar numerele naturale b și c sunt invers proporționale cu 5 și 3. Determinați numerele naturale a , b și c , știind că $a \cdot b \cdot c = 960$.
- 5p 3. Într-o săptămână, la un muzeu, s-au vândut 300 de bilete de intrare, dintre care 60% au fost pentru copii și restul pentru adulți. Știind că biletul pentru un adult costă 20 de lei și biletul pentru un copil costă jumătate din prețul biletului pentru un adult, calculați suma încasată de acest muzeu, în acea săptămână, din vânzarea biletelor de intrare.

4. Se consideră $x = \left(\frac{15}{\sqrt{75}} + \frac{18}{\sqrt{108}} + \frac{33}{\sqrt{363}} \right) \cdot 5\sqrt{3}$ și $y = 2(\sqrt{11} - 3)(3\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{11} + 3)(3\sqrt{2} - \sqrt{3})$, numere reale.

5p a) Arătați că $x = 45$.

5p b) Știind că numărul x reprezintă $p\%$ din numărul y , determinați numărul natural p .

5p 5. Se consideră expresia $E(x) = (3x + 5)^2 - 9(x + 1)^2 - 12(x + 1)$, unde x este număr real. Arătați că $(E(x) - 2)(E(x) - 2^2) \cdot \dots \cdot (E(x) - 2^{2020}) = 0$, pentru orice număr real x .

SUBIECTUL al III-lea - Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

(30 de puncte)

1. În Figura 2 este reprezentat un romb $ABCD$ cu $AB = 12\text{ cm}$, $m(\angle BAD) = 45^\circ$ și pătratul $BCMN$ situat în exteriorul rombului $ABCD$.

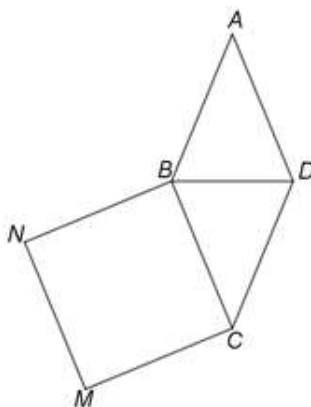


Figura 2

5p a) Arătați că perimetrul pătratului $BCMN$ este egal cu 48 cm.

5p b) Demonstrați că dreptele AM și DC sunt paralele.

5p c) Arătați că aria triunghiului ANC este egală cu $72(\sqrt{2} + 1)\text{ cm}^2$.

2. În Figura 3 este reprezentat un dreptunghi $ABCD$ cu $AB = 30\text{ cm}$, $BC = 40\text{ cm}$ și $MD \perp (ABC)$ astfel încât $MD = 24\text{ cm}$. Punctele E și F sunt situate pe segmentul AB astfel încât $AE = EF = FB$ și O este punctul de intersecție a dreptelor AC și BD .

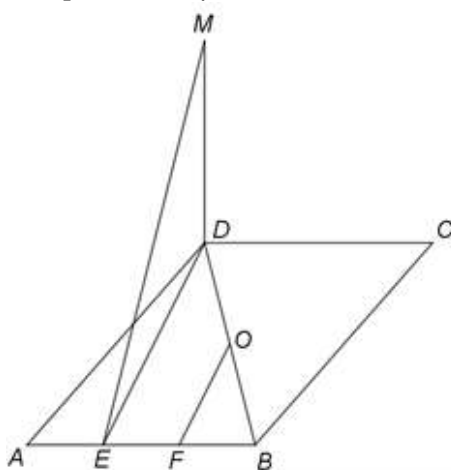


Figura 3

5p a) Arătați că aria patrulaterului $ABCD$ este egală cu 1200 cm^2 .

5p b) Demonstrați că dreapta OF este paralelă cu planul (MDE) .

5p c) Arătați că distanța de la punctul M la dreapta AC este egală cu $24\sqrt{2}\text{ cm}$.

TESTUL 40: REZOLVARE

SUBIECTUL I: 1) $50 - 5 \cdot 9 = 50 - 45 = 5$.

2) 5 caiete ---- 20 lei $\Rightarrow$ 1 caiet ---- $20 : 5 = 4$ (lei) $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ 3 caiete ---- $3 \cdot 4 = 12$ (lei) sau cu regula de trei

simplă:

5c ---- 20 lei	(p.d.)
3c ---- x	

$$x = \frac{3 \cdot 20}{5} = \frac{60}{5} = \frac{12}{1} = 12 \text{ (lei)}.$$

3) $\overline{ab} : 3 \Rightarrow (a+b) : 3$

$\overline{ab}$ cel mai mic $\Rightarrow \boxed{a=1}$ } $\Rightarrow \boxed{b=2}$ (pt. ca $1+2=3 : 3$)

R: $\overline{ab} = 12$.

4) $90^\circ : 2 = 45^\circ$ (Bisectoarea împarte $\angle$ în 2 unghiuri congr.)

5) $EG = a\sqrt{2} = 30\sqrt{2}$ (cm). Diagonala pătratului cu latura de lungime a se calculează după formula: $\boxed{d = a\sqrt{2}}$

6) Procentul elevilor din clasa a VIII-a:

$$100\% - (30\% + 25\% + 25\%) = 100\% - 80\% = 20\%.$$

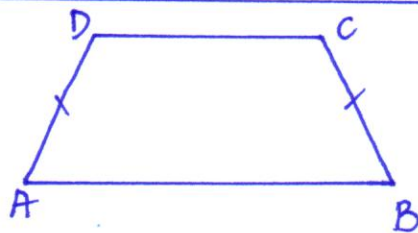
Numărul elevilor din clasa a VIII-a:

$$(20\% \text{ din } 600) = \frac{20}{100} \cdot 600 = 120 \text{ (elevi)}.$$

SUBIECTUL al II-lea: 1)

2) $\frac{a}{2} = \frac{b}{6}$

$$\frac{b}{\frac{1}{5}} = \frac{c}{\frac{1}{3}}$$



Înmulțim a doua egalitate, membru cu membru, cu $\frac{1}{30} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{b}{\frac{1}{5} \cdot 30} = \frac{c}{\frac{1}{3} \cdot 30} \Leftrightarrow \frac{b}{6} = \frac{c}{10}$$

Prin urmare avem $\frac{a}{2} = \frac{b}{6} = \frac{c}{10} = k \Rightarrow \begin{cases} a=2k \\ b=6k \\ c=10k \end{cases}$

$$abc = 960 \Leftrightarrow 2k \cdot 6k \cdot 10k = 960 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 120k^3 = 960 \Leftrightarrow k^3 = \frac{960}{120} = 8 \Rightarrow k = 2$$

$$a = 2k = 2 \cdot 2 = 4; b = 6k = 6 \cdot 2 = 12; c = 10k = 10 \cdot 2 = 20.$$

R: $a = 4; b = 12; c = 20$.

$$3) (60\% \text{ din } 300) = \frac{60}{100} \cdot 300 = 180 (\text{bilete pt. copii})$$

$$300 - 180 = 120 (\text{bilete pentru adulti}).$$

$$\text{Biletul pt. copii costă } \frac{1}{2} \cdot 20 \text{ lei} = 10 \text{ lei}$$

Suma încasată:

$$180 \cdot 10 + 120 \cdot 20 = 1800 + 2400 = 4200 (\text{lei})$$

R: 4200 lei.

$$4) a) x = \left(\frac{15^3}{5\sqrt{3}} + \frac{18^3}{6\sqrt{3}} + \frac{3^3}{11\sqrt{3}} \right) \cdot 5\sqrt{3} = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = 5\sqrt{3} \\ \sqrt{108} = \sqrt{36 \cdot 3} = 6\sqrt{3} \\ \sqrt{363} = \sqrt{121 \cdot 3} = 11\sqrt{3} \end{array} \right.$$

$$= \frac{3}{\sqrt{3}} \cdot 5\sqrt{3} + \frac{3}{\sqrt{3}} \cdot 5\sqrt{3} + \frac{3}{\sqrt{3}} \cdot 5\sqrt{3} =$$

$$= 3 \cdot \frac{3}{\sqrt{3}} \cdot 5\sqrt{3} = 45. \text{ Deci } x = 45, 2. e. d.$$

$$b) y = 2(\sqrt{11} - 3)(\sqrt{11} + 3)(3\sqrt{2} - \sqrt{3})(3\sqrt{2} + \sqrt{3}) =$$

$$= 2(\sqrt{11}^2 - 3^2)((3\sqrt{2})^2 - \sqrt{3}^2) = 2(11 - 9)(18 - 3) =$$

$$= 2 \cdot 2 \cdot 15 = 60. \text{ Deci } y = 60.$$

$$\left. \begin{array}{l} x = p\% \cdot y \\ x = 75\% \text{ din } y \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = 75.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 45 \text{ ----- } 60 \\ p \text{ ----- } 100 \\ p = \frac{45 \cdot 100}{60} = 75(\%) \end{array} \right.$$

$$\text{Verificare: } 45 = \frac{75}{100} \cdot 60 \Leftrightarrow 45 = 45 (A).$$

$$5) E(x) = 9x^2 + 30x + 25 - 9(x^2 + 2x + 1) - 12x - 12 =$$

$$= \cancel{9x^2} + 30x + 25 - \cancel{9x^2} - 18x - 9 - 12x - 12 =$$

$$= 4$$

Deci $E(x) = 4$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

$$(E(x) - 2)(E(x) - 2^2) \cdots (E(x) - 2^{2020}) =$$

$$4 - 2^2 = 4 - 4 = 0$$

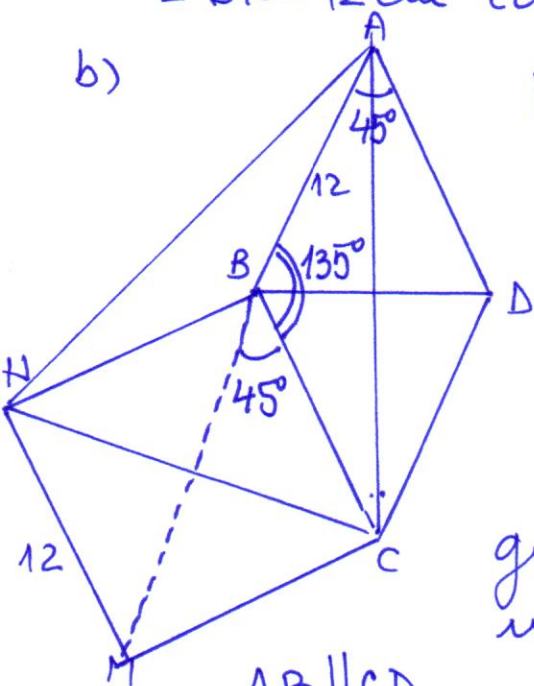
$$4 - 2^3 = 4 - 8 = -4$$

$$= (4 - 2)(4 - 2^2) \cdots (4 - 2^{2020}) = 2 \cdot 0 \cdot (-4) \cdots (4 - 2^{2020}) =$$

$$= 0, \text{ pentru că unul din factori este } 0, \text{ pt. orice } x \in \mathbb{R}.$$

SUBIECTUL al III-lea:

- 1) a) $ABCD$ romb $\Rightarrow AB = BC = CD = AD = 12 \text{ cm}$
 $BCMN$: pătrat $\Rightarrow BC = CM = NM = BN$ } $\Rightarrow BC = MC = MN =$
 $= BN = 12 \text{ cm}$ iar $P_{BCMN} = 4 \cdot BC = 4 \cdot 12 = 48(\text{cm}), \text{ g.e.d.}$



Mai întâi observăm că punctele A, B, M sunt coliniare.

Intr-adevăr, $m(\widehat{ABM}) = m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{CBM}) = 135^\circ + 45^\circ = 180^\circ$.

(Aici am folosit faptul că în romb $ABCD$ $\widehat{A}$ și $\widehat{B}$: suplementare, deci $m(\widehat{A}) = 45^\circ \Rightarrow m(\widehat{B}) = 135^\circ$ și BM : diagonala pătratului $BCMN$, face cu latură un unghi de 45° .)

$AB \parallel CD$
 A, B, M : coliniare $\Rightarrow AM \parallel CD, \text{ 2.e.d.}$

c) $A_{\Delta ANC} = 2 \cdot A_{\Delta ABC} + \frac{1}{2} A_{BCMN} \quad (1)$

Intr-adevăr $\Delta ABC \equiv \Delta ABN$ (L.U.L.) $\Rightarrow A_{\Delta ABN} = A_{\Delta ABC}$.

$$\begin{cases} AB = BC = BN = 12 \text{ cm} \\ m(\widehat{ABN}) = 360^\circ - 135^\circ - 90^\circ = 135^\circ = m(\widehat{ABC}) \end{cases}$$

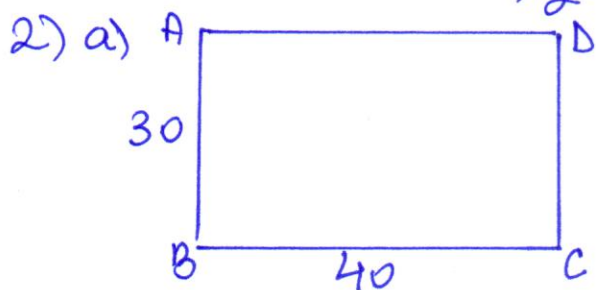
$\uparrow \quad \uparrow$
 $m(\widehat{ABC}) \quad m(\widehat{NBC})$

$$A_{\Delta ABC} = A_{\Delta ABD} = \frac{1}{2} A_{ABCD}, \text{ iar } A_{\Delta ABD} = \frac{ab \sin \widehat{C}}{2} =$$

$$= \frac{AB \cdot AD \cdot \sin \widehat{A}}{2} = \frac{12 \cdot 12 \cdot \sin 45^\circ}{2} = \frac{72\sqrt{2}}{2} (\text{cm}^2)$$

$$A_{BCMN} = 12^2 = 144 (\text{cm}^2)$$

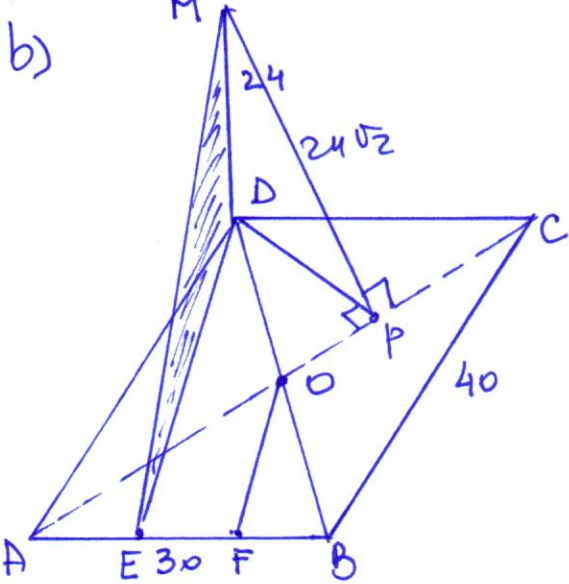
Avem $A_{\Delta ANC} \stackrel{(1)}{=} 2 \cdot \frac{72\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot 144 = 72\sqrt{2} + 72 =$
 $= 72(\sqrt{2} + 1) (\text{cm}^2), \text{ g.e.d.}$



$$A_{\square} = L \cdot l$$

$$A_{ABCD} = BC \cdot AD = 40 \cdot 30 = 1200 (\text{cm}^2)$$

g.e.d.

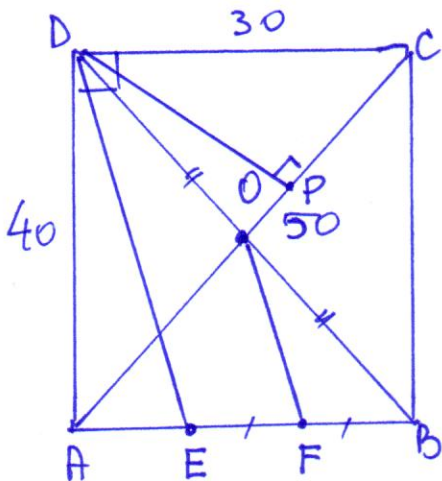


$$AE = EF = FB = \frac{AB}{3} = \frac{30}{3} = 10 \text{ (cm)}.$$

$[AC] \cap [BD] \text{ se înjumătățesc}$ } pt.
 $AC = BD$

că $ABCD$: dreptunghi.

Cu T.P. în $\triangle ABC$ cu $m(\hat{B}) = 90^\circ$
 se poate calcula $AC = 50 \text{ (cm)}$
 $(30, 40, 50)$: triplet pitagoreic.



Considerăm $[OF] \cap \triangle BDE$.

$$\begin{array}{l} BO = OD \\ BF = FE \end{array} \mid \Rightarrow [OF]: \text{linie mijlocie în } \triangle BDE,$$

$$\text{deci } OF \parallel DE \mid \Rightarrow$$

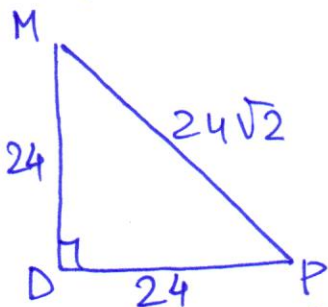
$$DE \subset (MDE) \mid \Rightarrow$$

$\Rightarrow OF \parallel (MDE)$. (O dreaptă exterioară
 este paralelă cu planul dacă este
 paralelă cu o dreaptă din plan.)

c) $MD \perp (ABC)$
 Ducem $DP \perp AC$ } $\Rightarrow MP \perp AC$ (T.3.1), deci $d(M, AC) = MP$.

În $\triangle DAC$, a_u-a T.Î. : $AC \cdot DP = DA \cdot DC \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 50 \cdot DP = 40 \cdot 30 \Rightarrow DP = \frac{40 \cdot 30}{50} = 24 \text{ (cm)}$$



$$\begin{array}{l} MD \perp (ABC) \\ DP \subset (ABC) \end{array} \mid \Rightarrow MD \perp DP \Rightarrow \triangle MDP: \text{dr. în } \hat{D}$$

$$MD = DP = 24 \text{ cm} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow MP = 24\sqrt{2} \text{ cm, g.e.d.}$$

$$\text{Deci } d[M; AC] = MP = 24\sqrt{2} \text{ cm.}$$

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

Matematică

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 40

- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

- Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie 5 puncte, fie 0 puncte.
- Nu se acordă punctaje intermediare.

SUBIECTUL al II-lea și SUBIECTUL al III-lea

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	5	5p
2.	12	5p
3.	12	5p
4.	45	5p
5.	$30\sqrt{2}$	5p
6.	120	5p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.	Desenează trapezul isoscel Notează trapezul isoscel $ABCD$ cu $AB \parallel CD$ și $AB > CD$	4p 1p
2.	$\frac{a}{2} = \frac{b}{6}$ și $5b = 3c$, deci $b = 3a$ și $c = 5a$, de unde obținem $a \cdot 3a \cdot 5a = 960 \Leftrightarrow a^3 = 64$, deci $a = 4$ $b = 12$, $c = 20$	3p 2p
3.	S-au vândut $\frac{60}{100} \cdot 300 = 180$ de bilete pentru copii și $300 - 180 = 120$ de bilete pentru adulți Din vânzarea билетelor de intrare s-au încasat $180 \cdot \frac{1}{2} \cdot 20 + 120 \cdot 20 = 4200$ de lei	2p 3p
4.	a) $x = \left(\frac{15}{5\sqrt{3}} + \frac{18}{6\sqrt{3}} + \frac{33}{11\sqrt{3}} \right) \cdot 5\sqrt{3} = \left(\frac{3}{\sqrt{3}} + \frac{3}{\sqrt{3}} + \frac{3}{\sqrt{3}} \right) \cdot 5\sqrt{3} =$ $= \frac{9}{\sqrt{3}} \cdot 5\sqrt{3} = 45$ b) $y = 2(\sqrt{11} - 3)(\sqrt{11} + 3)(3\sqrt{2} + \sqrt{3})(3\sqrt{2} - \sqrt{3}) = 2(11 - 9)(18 - 3) = 2 \cdot 2 \cdot 15 = 60$ $\frac{p}{100} \cdot y = x \Leftrightarrow \frac{p}{100} \cdot 60 = 45 \Leftrightarrow p = 75$	3p 2p 3p 2p
5.	$E(x) = 9x^2 + 30x + 25 - 9x^2 - 18x - 9 - 12x - 12 = 4$, pentru orice număr real x Cum $E(x) - 2^2 = 0$, obținem $(E(x) - 2)(E(x) - 2^2) \cdot \dots \cdot (E(x) - 2^{2020}) = 0$, pentru orice număr real x	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.	a) $ABCD$ este romb, deci $BC = AB = 12$ cm $P_{ABCD} = 4BC = 4 \cdot 12 = 48$ cm	3p 2p
----	--	----------

	b) $ABCD$ este romb $\Rightarrow \sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle BCD$, deci $m(\sphericalangle BCD) = 45^\circ$ și, cum $BCMN$ este pătrat și $m(\sphericalangle CBM) = 45^\circ$, obținem $\sphericalangle CBM \equiv \sphericalangle BCD$; cum $\sphericalangle CBM$ și $\sphericalangle BCD$ sunt alterne interne, obținem $BM \parallel DC$ $ABCD$ romb $\Rightarrow AB \parallel CD$ și, cum $BM \parallel DC$, obținem că punctele A, B și M sunt coliniare, deci $AM \parallel DC$	3p 2p
	c) $BCMN$ este pătrat, deci $BO \perp NC$, unde $\{O\} = BM \cap NC$ și, cum A, B și M sunt coliniare, obținem $AO \perp NC$ $AO = AB + BO$, $BO = \frac{CN}{2} = 6\sqrt{2}\text{ cm} \Rightarrow \mathcal{A}_{\triangle AMC} = \frac{AO \cdot NC}{2} = \frac{(12 + 6\sqrt{2}) \cdot 12\sqrt{2}}{2} = 72(\sqrt{2} + 1)\text{ cm}^2$	2p 3p
2.	a) $ABCD$ este dreptunghi, deci $\mathcal{A}_{ABCD} = AB \cdot BC =$ $= 30 \cdot 40 = 1200\text{ cm}^2$	3p 2p
	b) $AE = EF = FB$, deci $\frac{BF}{BE} = \frac{1}{2}$ și, cum $\frac{BO}{BD} = \frac{1}{2}$, obținem $\frac{BF}{BE} = \frac{BO}{BD} \Rightarrow OF \parallel DE$ $OF \parallel DE$ și $DE \subset (MDE)$, deci $OF \parallel (MDE)$	3p 2p
	c) $MD \perp (ABC)$, deci, pentru $DN \perp AC$, $N \in AC$, cum $AC \subset (ABC)$, obținem $MN \perp AC$, deci $d(M, AC) = MN$ $\triangle ADC$ este dreptunghic, deci $AC = 50\text{ cm}$ și $DN \perp AC$, deci $DN = \frac{AD \cdot DC}{AC} = 24\text{ cm}$ și, cum $\triangle MDN$ este dreptunghic isoscel, obținem $MN = 24\sqrt{2}\text{ cm}$	2p 3p